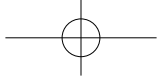


第二篇

小学篇



第 1 节 计算硬功夫中的巧劲儿

例 1 求和：

$$4+43+443+\cdots+\underbrace{4\ 444\ 444\ 443}_{9\uparrow 4}=?$$

例 2 求和：

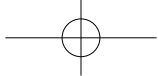
$$1+2+4+8+\cdots+1024=?$$

例 3 求和：

$$3+9+27+\cdots+6561=?$$

例 4 计算

$$9\frac{7}{8}\div\left(9\frac{7}{8}+\frac{1999^2-1999+1}{1999^2-1999\times 1998+1998^2}\right)$$



例 5 规定运算 “ $*$ ”:

$$a*b=3\times a-2\times b, \text{ 计算: } \frac{4}{3}*\left(\frac{5}{4}*\frac{6}{5}\right)$$

例 6 有一种运算 $*$ 满足以下条件:

1. $2*3=5$;
 2. $a*b=b*a$;
 3. $a*(b+c)=a*b+a*c$;
- 求 $8*9$ 。

例 7 有一种运算 “ $*$ ” 满足以下条件:

1. $x*x=5$;
 2. $x*(y*z)=(x*y)+z-5$;
- 求 $2019*1949$ 。

例 8 已知:

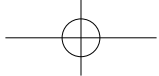
1. $a*1=a$;
 2. $a*n=2\times[a*(n-1)]+a$;
- 且 $m*4=45$, 求:
- (1) m 等于多少?
 - (2) $m*8$ 等于多少?

例 9 定义 $a*b=a+b-\frac{a\times b}{2018}$

- 1. 运算是否满足交换律？
- 2. 计算
 - (1) $2019*(2019\times 2018)$
 - (2) $2019*2019*...*2019*2018*(2019\times 2018)*(2019\times 2018)*...*(2019\times 2018)$ ；其中，2019 有 2019 个， 2019×2018 有 2018 组。
- 3. 计算
 - $2019*2019*...*2019*(2\times 2018)*(2019\times 2018)*(2019\times 2018)*...*(2019\times 2018)$ ；其中 2019 有 2019 个， 2019×2018 有 2018 组。

例 10 观察数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{2015}{2018}, \frac{2017}{2018}$ 的规律，问：

- (1) 第 2018 项是什么？
- (2) 前 2018 项的和是多少？

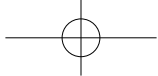


例 11 将从 1 开始的自然数按照图中规律排成数阵，数 1000 所在的行与列中分别有一个最小的数，求这两个数的和。

1	2	9	10	...
4	3	8	11	...
5	6	7	12	...
16	15	14	13	...
17	...			

例 12 将非零自然数按照图中规律排列，有些数会多次出现，有些数永远不会出现。请问：99 在图中出现几次？最后一次出现的位置在哪里？最小的永远不出现的数是多少？

1	2	3	4	...	97	98	99
2	3	4	5	...	98	99	100
4	5	6	7	...	100	101	102
7	8	9	10	...	103	104	105
11	12	13	14	...	107	108	109
...							



例 13 求下列两个算式结果的整数部分

(1)
$$\frac{11 \times 66 + 12 \times 67 + 13 \times 68 + 14 \times 69 + 15 \times 70}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \times 100$$

(2)
$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{29^2}}$$

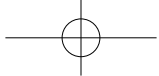
例 14 设： $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{99}{100}$ ， $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{98}{99}$ ， $C = \frac{1}{10}$ ， 比较 A、B 和 C 之间的大小。

例 15 计算 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{13} \right) \times 2019$

结果的小数点后第 2019 位数是多少？

例 16 计算

$$\left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{28 \times 29} \right) \times 24 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2 + 2^2} + \cdots + \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + 14^2} \right)$$



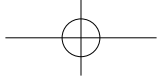
第 2 节 巧算小数

例 1 计算
 $4038 \times 9 - 201.9 \times 90 + 20190 \times 0.1$

例 2 计算
 $75 \times 4.7 + 15.9 \times 25$

例 3 计算
 $7.816 \times 1.45 + 3.14 \times 2.184 + 1.69 \times 7.816$

例 4 计算
 $999.9 \times 0.28 - 66.66 \times 3.7$



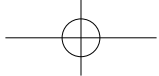
例 5 计算
 $(2+1.23+2.34) \times (1.23+2.34+3.45) - (1.23+2.34)$
 $\times (2+1.23+2.34+3.45)$

例 6 比较下面两个数的大小
 $A = 0.98732 \times 72.345$
 $B = 0.98733 \times 72.344$

第 3 节 巧算分数

例 1 计算
 $\left(3\frac{1}{4} + 6\frac{2}{3} + 1\frac{3}{4} + 8\frac{1}{3}\right) \times \left(2 - \frac{7}{20}\right)$

例 2 计算
 $76 \times \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{53}\right) + 23 \times \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{76}\right) - 53 \times \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{76}\right)$



例 3 计算

$$8\frac{12}{13}\times\frac{2}{19}+19\frac{2}{13}\times13\frac{1}{19}$$

例 4 计算

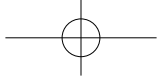
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{8}{9}+\frac{8}{10}\right)+\frac{9}{10}$$

例 5 计算

$$\left(\frac{2+3+4}{1}-\frac{3+4+5}{2}+\frac{4+5+6}{3}-\cdots-\frac{11+12+13}{10}\right)\div\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{10}\right)$$

例 6 比较分数大小:

$$\frac{22\ 222}{999\ 999}\text{和}\frac{2222}{99\ 999}$$



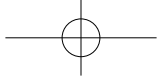
第 4 节 巧算循环小数与分数

例 1 将 $0.\dot{1}4285\dot{7}$
化成分数。

例 2 把 $0.12\dot{3}$
化成分数。

例 3 有一个算式 $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{11} \approx 1.37$ ，其中 x, y, z 是整数，右边为四舍五入后精确到小数点后两位的值，求 x, y, z 的值。

例 4 我们把由数字 0 和 7 组成的小数叫作“特殊数”，例如 $7.00\dot{7}$ 、 $70\ 770$ 等。如果我们把 1 写成若干个“特殊数”的和，最少要写成多少个？

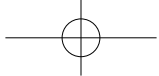


第 1 节 直线的行程问题

例 1 某人驾车从甲地到乙地，若速度为 60 千米 / 小时，正好可以按时返回甲地；可当他到乙地时，发现来的时候速度只有 55 千米 / 小时。（开车能不能用点心啊？）如果他想按时返回甲地，那么应该以多大的速度往回开？

例 2 某人顺风跑 90 米用了 10 秒，风速不变，他逆风跑 70 米也用了 10 秒。问：无风的时候，他跑 100 米要多久？

例 3 一条大河有 A、B 两个港口。水从 A 流向 B 的速度是 4 千米 / 小时。甲、乙两船同时由 A 驶向 B，且在 A 和 B 之间不停往返。甲的静水速度是 28 千米 / 小时，乙的静水速度是 20 千米 / 小时。已知甲、乙两船第二次迎面相遇的地点与甲船第二次追上乙船（不算甲、乙在 A 处同时开始出发的那一次）的地点相距 40 千米。求 A、B 两个港口之间的距离。

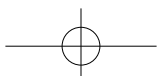
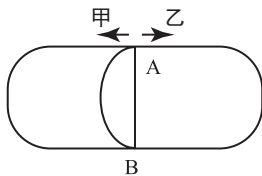


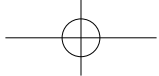
例 4 甲、乙两车分别从 A、B 两地同时出发相向而行，5 小时后相遇；如果乙车提前出发 1 小时，则在不到中点 13 千米处与甲车相遇；如果甲车提前 1 小时出发，则在过中点 37 千米后与乙车相遇。求甲车和乙车的速度差。

第 2 节 环形的行程问题

例 1 甲、乙二人骑自行车从环形公路上的同一地点同时出发，背向而行。现在已知甲走一圈的时间是 70 分钟，如果在出发后 45 分钟，甲、乙二人首次相遇，那么乙走一圈的时间是多少分钟？

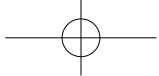
例 2 学校操场的 400 米大跑道中套着 300 米小跑道，大小跑道有 200 米路程重合。甲以 6 米 / 秒的速度沿大跑道逆时针跑，乙以 4 米 / 秒的速度沿小跑道顺时针跑。两人同时从 A 出发，当他们第二次在跑道上相遇时，甲跑了多少米？





例 3 甲、乙二人在同一条椭圆形跑道上进行特殊训练。他们同时从同一地点出发，向相反方向跑，每人跑完第一圈到达出发点后立即回头，加速跑第二圈。跑第一圈时，乙的速度是甲速度的 $\frac{2}{3}$ ，甲跑第二圈时速度比第一圈提高 $\frac{1}{3}$ ，乙跑第二圈时速度提高 $\frac{1}{5}$ ，已知甲、乙二人的第二次相遇点到第一次相遇点的最短路程是190米。问：这条椭圆形跑道长度是多少？

例 4 甲、乙二人同时从山脚开始爬山，到达山顶后立即下山，二人下山的速度是上山的1.5倍，而且甲比乙快。二人出发1小时后，甲、乙在距离山顶600米处相遇，当乙到山顶后，甲恰好在半山腰。问：甲回到出发点一共用时多久？

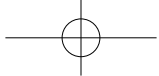


第 1 节 杂题

例 1 一个容器中装了 $\frac{3}{4}$ 的水，现有大、中、小三种方块若干。第一次把中方块沉入水中；第二次先拿起中方块，再把三个小方块沉下去；第三次先取出所有方块，再把一个大方块沉入水中，最后把大方块取出，这时容器内剩下的水是最开始的 $\frac{2}{9}$ 。已知每次水溢出的情况是：第一次是第三次一半，第三次是第二次一半。求大、中、小三个方块的体积比。

例 2 一辆杂技自行车的前轮半径是 $\frac{45}{11}$ 分米，后轮半径是 $\frac{10}{3}$ 分米，那么当后轮转的圈数比前轮多 10 圈的时候，这辆车前进了多少米？（ π 取 3.14。）

例 3 比赛用的足球通常是由黑白两色的皮子缝制而成的，黑色皮子是正五边形，白色皮子是正六边形，并且黑白两色多边形的边长相等。每块黑色皮子的 5 条边分别和 5 块白色皮子缝一起；每块白色皮子的 6 条边中，有 3 条边与黑色皮子的边缝一起，另外 3 条则和其他白色皮子的边缝一起。如果一个足球表面上有 12 块黑色的正五边形皮子，那么这个足球应该有多少块白色正六边形的皮子呢？

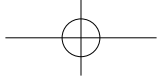


例 4 汽车轮胎如果放在前轮可以行驶 50 000 千米，如果放在后轮可以行驶 30 000 千米。现有一辆汽车，允许在恰当的时候将前轮和后轮互换，那么最多可以行驶多少千米而不需要购买新的轮胎？如果在行驶过程中允许前后轮对调一次，那么应当在行驶到多少千米的时候对调？

例 5 一辆三轮摩托车有 3 个车轮，前轮可以行驶 18 000 千米，左后轮可以行驶 8000 千米，右后轮可以行驶 14 400 千米。现在有一辆刚刚换上新车胎的三轮摩托，可以随时调换两个轮胎，请问：这辆三轮摩托最多可以行驶多少千米而不需要购买新轮胎？在这期间至少要换几次轮胎？具体的策略是怎么样的？

第 2 节 列方程解应用题

例 1 甲、乙、丙三人都爱好收藏古钱币，乙的藏品比甲 2 倍还多 5 种，丙的藏品比甲的 $\frac{1}{3}$ 多 2 种，三个人一共有藏品 97 种，问：甲有多少种藏品？

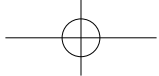


例 2 鸡和兔子一共有 18 个头和 44 条腿，
问：有多少只兔子，多少只鸡？

例 3 甲、乙两人从相距 36 千米的两地相向而行，如果甲比乙先出发 2 小时，那么他们在乙出发 2.5 小时后相遇，如果乙比甲先出发 2 小时，那么他们在甲出发 3 小时后相遇。问：甲、乙两人每小时各走多少千米？

例 4 历史名题：
丢番图活了多久？

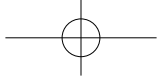
古希腊伟大的数学家丢番图的墓志铭是这样写的：“他的童年占去了一生的 $\frac{1}{6}$ ，接着的 $\frac{1}{12}$ 是少年时期，又过了 $\frac{1}{7}$ 的时光，他结婚了。5 年以后他有了儿子，可是命运不济，儿子只活到父亲岁数的一半就匆匆离世。4 年后，他也因过度悲伤而离开了人世。丢番图活了多少岁？”



例 5 一个两位数，十位数字与个位数字之和是 8，这个两位数除以十位数字与个位数字的差，所得的商是 11，余数是 5，求这个两位数。

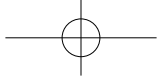
例 6 甲、乙两个书架各有若干本书，如果从乙上拿 5 本放到甲上，那么甲的书比乙剩余的书多 4 倍；如果从甲上拿 5 本给乙，那么甲剩余的书就是乙的 3 倍。问：原来甲、乙各有多少本书？

例 7 甲、乙两车运一堆货物，如果单独运，甲比乙少 5 次；如果一起运，各运 6 次刚好运完。问：甲单独运要几次运完？



例 8 牧场上有一片牧草，牧草每天都在匀速生长。这片牧草可供 10 头牛吃 20 天，或者可供 15 头牛吃 10 天。问：这片牧草可供 25 头牛吃几天？

例 9 一个从小到大排列的等差数列，如果把首项除以 2，末项乘以 2，那么这些数的平均数增加了 7；如果首项乘以 2，末项除以 2，那么平均数少了 2。已知等差数列中所有数的和等于 245，求数列的末项。



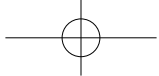
16

浓度问题

例 1 某人用盐和开水配制了 400 克浓度为 15% 的盐水，那么在配制的过程中，用了多少克的开水？

例 2 在 200 克浓度为 15% 的糖水中加入 50 克糖，那么糖水浓度变为多少？再加入 150 克水，浓度变为多少？最后又加入 200 克浓度为 8% 的糖水，浓度变为多少？

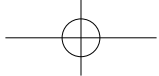
例 3 在浓度为 40% 的酒精溶液中加入 5 千克水，浓度变为 30%。问：再加入多少千克纯酒精，浓度才能变成 50%？



例 4 甲、乙、丙三瓶糖水，浓度依次为 63%、42%、28%，其中甲瓶有 11 千克；先将甲、乙两瓶糖水混合，浓度变为 49%，然后把丙中的糖水全部倒入混合液中，得到浓度为 35% 的糖水。问：丙瓶中原来有多少糖水？

例 5 有一杯盐水，如果加入 200 克水，那么浓度变为原来一半；如果加入 25 克盐，那么浓度变为原来的 2 倍。问：盐水原来浓度多少？

例 6 有甲、乙、丙三种酒精溶液，质量比是 3 : 2 : 1，把两瓶酒精溶液混合后再按原来的质量分配到各自的瓶中，称为一次操作。现在先对甲、乙两瓶酒精溶液进行一次操作，再对乙、丙两瓶酒精溶液进行一次操作，最后对丙、甲两瓶酒精溶液进行一次操作。三次操作之后，甲、乙两瓶的浓度分别是 57% 和 51%，求最初丙酒精溶液的浓度是多少？

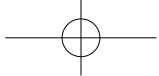


第 1 节 整除

例 1 若整数 $\overline{x2004y}$ 能被 99 整除，
求 x 和 y 各是什么数字？

例 2 某七位数 $\overline{1993xyz}$ 能同时被 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 整除，那么 x, y, z 分别是什么数字？

例 3 已知 41 位数 $\overline{5555\dots x999\dots 9}$ (5 和 9 各有 20 个) 能被 7 整除，求 x 是数字几？



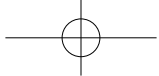
第 2 节 猜的技巧

例 1 修改 31 743 中的某一位数字，可得到 823 的倍数，问：修改后这个数是多少？

例 2 有一些自然数，从左向右与从右向左读完全是一样的，我们把这样的数称为“回文数”，比如 1331、181、77 都是回文数。如果一个六位回文数除以 95 的商也是一个回文数，那么这个六位数是多少？

第 3 节 余数

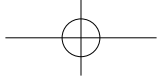
例 1 97 和 79 除以一个数，余数都是 7，
那么这个数可能是多少？



例 2 100 和 84 除以同一个数，得到的余数相同，但余数不为 0，这个除数可能是多少？

例 3 有一个大于 1 的整数，用它除 300、262、205 得到相同的余数，求这个数。

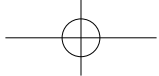
例 3.1 123123...123 (123 组 123)
除以 99 的余数是多少？



例 3.2 请找出所有的三位数，
使它除以 7、11、13 的余数之和尽可能大。

例 4 求 $7 + 7 \times 7 + \dots + \underbrace{7 \times 7 \times \dots \times 7}_{2008 \text{ 个 } 7}$
的末两位数是多少？

例 5 求 $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2007$ 的
末两位数是多少？



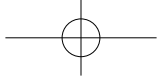
第 1 节 从基本概念讲起

例 1 把 15, 22, 30, 35, 39, 44, 52, 77, 91 平均分成三组, 使得每组三个数乘积相等, 这三组数分别是什么?

例 2 小明是个初中生, 有一次参加数学竞赛, 他的名次、分数和岁数的乘积是 2910, 求小明的名次、分数、岁数各是多少?

例 3 请问: 算式 $1 \times 2 \times \cdots \times 15$ 的计算结果末尾有几个 0?

例 4 9216 可以写成两个自然数的积, 则这两个自然数的和最小是多少?



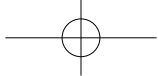
第 2 节 脑筋小转弯

例 1 三个自然数的乘积为 84，其中两个数的和正好等于第三个数，请求出这三个数。

第 3 节 唬人的难题

例 1 三个质数的倒数之和是 $\frac{1661}{1986}$ ，
则这三个质数之和是多少？

例 2 一位小朋友在做一道两位数乘以两位数的乘法题时，把一个乘数中的数字 5 看成了 8，由此得到乘积是 1872，那么原来正确的乘积应该是多少？

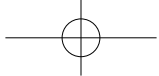


例 3 三个质数的乘积恰好是它们和的 5 倍，
这三个质数分别是多少？

例 4 若 n 为正整数， $n+6$ 和 $n+10$ 都是质数，
求 n 除以 3 所得的余数。

例 5 证明：
超过 40 的偶数都可以表示成两个奇合数之和。

例 6 从 $1! \ 2! \ 3! \cdots 100!$ 中去掉一个数，使得剩下的数的乘积构成一个完全平方数。问：被去掉的数是哪一个？

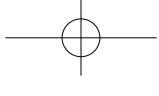


19

逻辑推理

例 1 在三个盒子里，一个装有两个黑球，一个装有两个白球，还有一个装有黑球和白球各一个，现在三个盒子上的标签都贴错了，你能否仅从一个盒子里拿一个球出来，就确定这三个盒子里各装的是什么球？

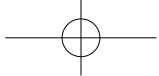
例 2 一次物理竞赛，甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八个人获得了前八名。老师让他们猜一下谁是第一名，甲说：“己或者辛。” 乙说：“我。” 丙说：“庚。” 丁说：“乙不是第一。” 戊说：“甲说的不对。” 己说：“我和辛都不是第一。” 庚说：“丙不是第一。” 辛说：“甲说的对。” 老师说：你们八个人中有三个人猜对了。请问：谁是第一名？



例 3 人类的血型分为 A、B、O 和 AB 四种。子女血型和父母血型的关系见下表。现在有 3 个分别穿红色、黄色、蓝色上衣的孩子，他们的血型依次为 O、A、B，每个孩子的一对父母都戴着相同颜色的帽子，颜色也是红、黄、蓝三种，依次表示所具有的血型为 AB、A、O，问：穿红、黄、蓝上衣的孩子的父母各戴什么颜色的帽子？

父母血型	子女可能血型
O, O	O
O, A	A, O
O, B	B, O
O, AB	A, B
A, A	A, O
A, B	A, B, AB, O
A, AB	A, B, AB
B, B	B, O
B, AB	A, B, AB
AB, AB	A, B, AB

例 4 房间里有 12 个人，其中有些人总说假话，其他人总说真话。第一个人说：“这里没有一个老实人。”第二个人说：“这里最多有一个老实人。”第三个人说：“这里最多有两个老实人。”以此类推，第十二个人说：“这里最多有 11 个老实人。”请问房间里到底有多少个老实人？



例 5 某次会议上，甲、乙、丙、丁四人进行交谈，他们分别用了汉语、英语、法语和俄语四种语言，并且还知道：

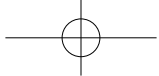
1. 甲、乙、丙会两种语言，丁只会一种；
2. 有一种语言四人中有三人会；
3. 甲会俄语，丁不会俄语，乙不会英语；
4. 甲和丙、丙和丁不能直接交谈，乙和丙可以直接交谈；
5. 没有人既会俄语又会法语。

请判断他们都会什么语言。

例 6 甲、乙、丙、丁、戊各从图书馆借了一本小说，他们约定读完后互换，假定五个人总是同时交换书，经过数次交换后，他们都读完了这五本书。现已知：

1. 甲最后读的那本书是乙读的第二本书；
2. 丙最后读的那本书是乙读的第四本书；
3. 丙读的第二本书，甲一开始就读了；
4. 丁读的最后一本书是丙读的第三本书；
5. 乙读的第四本是戊读的第三本；
6. 丁第三次读的书是丙一开始读的那本。

假设甲、乙、丙、丁、戊最后读的书是 A、B、C、D、E，请根据以上情况决定他们读的第四本书分别是什么？



例 7

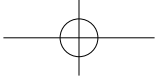
五个学生甲、乙、丙、丁、戊参加一场比赛，某人预测比赛结果的名次顺序是甲、乙、丙、丁、戊，结果没有猜对一个名次，也没有猜对任何一对相邻的名次（即某两个人实际上名次相邻，而猜测中名次也相邻，且顺序相同）；另一个人预测比赛结果为丁、甲、戊、丙、乙，结果猜对了两个名次，同时还猜对了两对相邻的名次，求比赛结果。

例 8

甲、乙、丙、丁四个队进行足球循环赛，每场比赛胜者得 3 分，打平各得 1 分，负者得 0 分。已知：

1. 比赛结束后四个队的分数都是奇数；
2. 甲队总分第一；
3. 乙队恰有两场平局，并且其中一场是与丙队比赛。

问：丁队的分数是多少？



例 9 赵老师给张三、李四、王二麻子各发了一张写着不同整数的卡片。赵老师说：“张三的卡片上写着一个两位数，李四的卡片上写着一个一位数，王二麻子的卡片上写着一个比 60 小的两位数，并且张三拿的数乘以李四拿的数等于王二麻子拿的数，请大家先看一下自己拿的数，然后猜猜其他两个人的数是多少？”

张三说：“我猜不到其他人的数。”

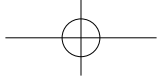
王二麻子说：“我也猜不到其他人的数。”

张三听了王二麻子的话，问李四：“你猜得出我和王二麻子的数吗？”

李四说：“我猜不到。”

听到这里，张三说：“我已经知道李四和王二麻子的数了！”

请问：三张卡片上的数各是多少？

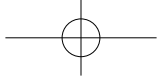


20 抽屉原理

例 1 学校在周末组织 4 个班的同学去春游，有 3 个地方可以选择：博物馆、天一阁和野生动物园。试说明，一定至少有两个班去同一个地点。

例 2 在 1830 个人中，至少有多少人的生日是在同一天？

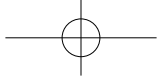
例 3 在某校的小学生中，年龄最小的学生是 5 岁，最大的是 13 岁，从这个学校中至少选出几个学生，才能保证一定有 4 个学生的年龄相同？



- 例 4** 一副扑克牌里共有 54 张牌，其中 2 张是大王和小王，还有黑桃、红桃、草花、方块四种花色各 13 张，那么：
1. 至少从中摸出多少张牌，才能保证里面有黑桃？
 2. 至少从中摸出多少张牌，才能保证里面至少有 4 张红桃？
 3. 至少从中摸出多少张牌，才能保证有 5 张牌是同一花色的？

- 例 5** 一张圆桌的周围恰好有 12 把椅子，现在已经有一些人在桌边就座，当再有一人入座时，他就必须和已就座的某个人相邻。问：已就座的至少有多少人？

- 例 6** 小张把围棋子混装在一个盒子里，每次从盒子中摸出 5 枚棋子，那么至少要摸几次，才能保证其中有 3 次摸出的棋子的颜色情况相同？

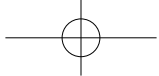


例 7 将 1 只白袜子、3 只黑袜子、3 只红袜子、9 只黄袜子和 10 只绿袜子放入一个口袋里，请问：

1. 一次至少要摸出多少只袜子，才能保证一定有颜色相同的两双袜子？
2. 一次至少要摸出多少只袜子，才能保证一定有颜色不同的两双袜子？

例 8 有 $3n+1$ ($n>2$) 个同学围成一个圆圈，坐好后发现任何 2 个男生之间至少有 2 个女生，那么最多有多少个男生？

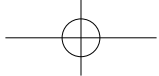
例 9 888 名学生站成一个圆圈，如果任意连续 32 人中至多有 9 名男生，那么男生最多有多少人？



例 10 求证：从 1 到 100 这 100 个数里挑 51 个数出来，一定存在两个数的差等于 50。

例 11 从 1 到 100 这 100 个自然数中，至少取多少个数才能保证至少有两个数互质？

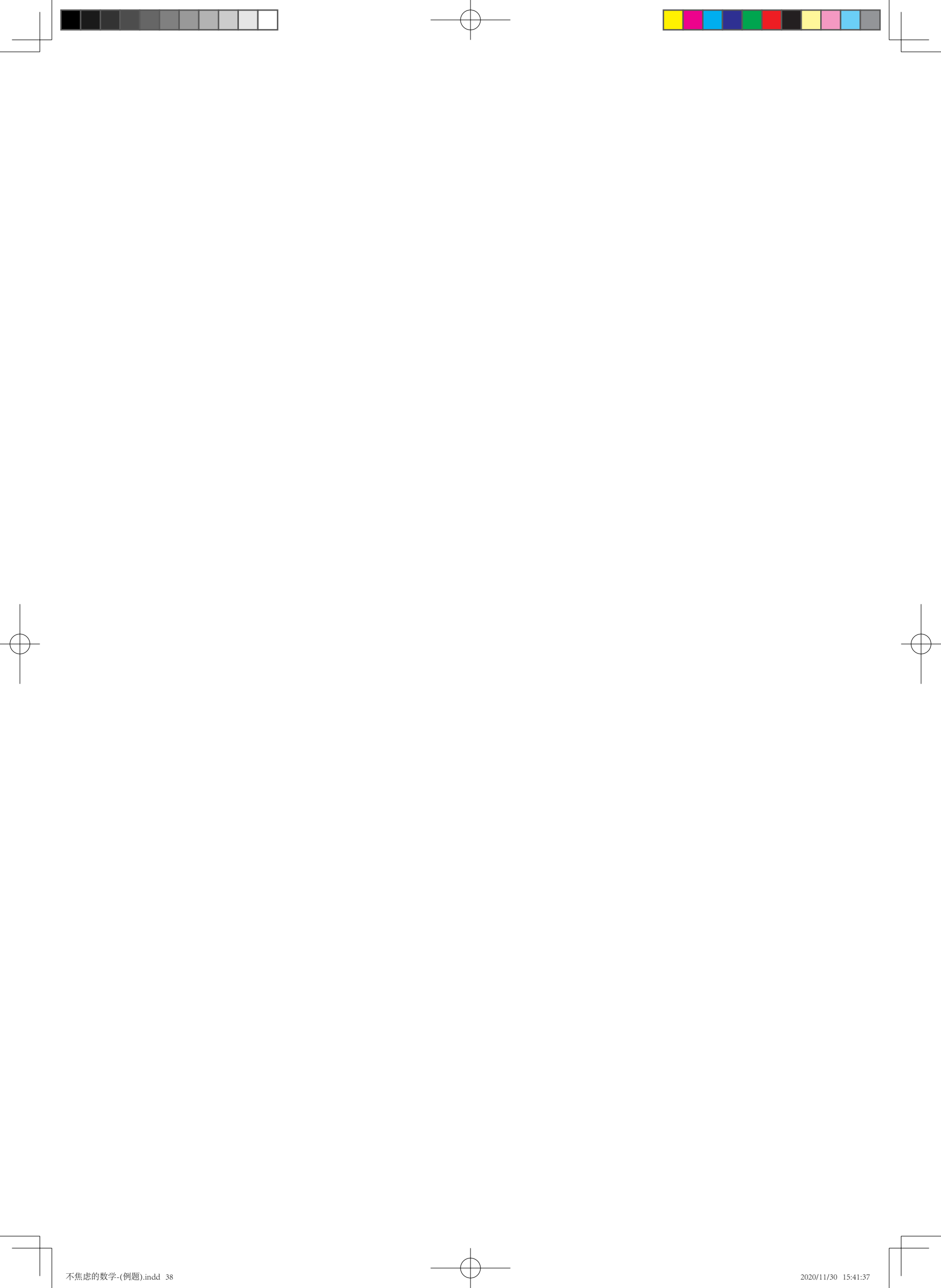
例 12 在一个边长为 2 的等边三角形内（包括边界）任意选 5 个点，请证明：一定有 2 个点之间的距离不大于 1。

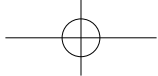


例 13 求证：在 $1, 11, 111, 1111, \dots$ 这一系列的数中，一定有一个是 71 的倍数。

例 14 将一个 5×5 的方格中的每个小方格都染成黑、白两种颜色之一，求证：一定存在一个长方形，4 个顶点处的 4 个方格同色。

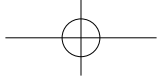
例 15 将一个 4×19 的方格表每个方格都染成黑、白、红三种颜色之一，请证明：一定存在一个长方形，四个顶点处的四个方格同色。





第三篇

初中篇



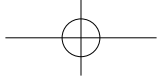
21

绝对值

例 1 设 $|a| > |b|$, $|c| > |a|$, $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$,
化简: $|a+c| - |b+c| - |a+b|$

例 2 求方程
 $|x-2| + |x-3| = 1$ 的实数解的个数。

例 3 若关于 x 的方程
 $||x-2|-1| = a$ 有三个整数解，则 a 的值是多少？



例 4 已知方程

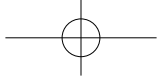
$|x| = ax + 1$ 有一负根且无正根，求 a 的取值范围。

例 5 解不等式

$$|2x-1| + |3x-2| + |4x-3| < 1$$

例 6 x, y, z 是实数，

并且满足 $x+y+z=0$, $xyz=2$ ，求 $|x|+|y|+|z|$ 的最小值？



22

多项式的四则运算

例 1 计算
 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

例 2 计算
 $(x+1)(2x+1)(3x+1)(6x+1)$

第 4 节 多项式乘法的应用

例 1 计算
 $2000^2 - 1999 \times 2001$

例 2 计算

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^n}+1)$$

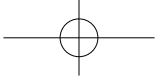
例 3 求证 $(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3$
 $=3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)$

第 5 节 多元多项式的乘法

例 1 $(x^2y+xy^2+x^3)(x+x^2z+y)$

例 2 计算

$$(x+2y)(x^2-xy-y^2)$$



23

二次根式

例 1 化简

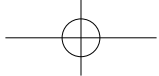
$$\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

例 2 化简

$$\frac{x^2 - x - 2 + (x - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 + x - 2 + (x + 1)\sqrt{x^2 - 4}} \quad (x > 2)$$

例 3 化简

$$\sqrt{9 - 2\sqrt{23 - 6\sqrt{10 + 4\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}}}$$



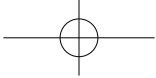
例 4 计算

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{35} + \sqrt{21} + 5}{\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}}$$

例 5 化简

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

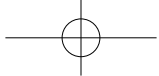
例 6 设 $x = \sqrt{6 + \sqrt{6}}$, $y = \sqrt{6 - \sqrt{6}}$
求 $x^6 + y^6 = ?$



例 7 求比 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6$ 大的最小整数。

例 8 设
$$x = \left(\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)} + \sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1 + \frac{1}{1-a}} + \frac{5a+1}{1-a} \right)^{2019}$$
 求 x 的个位数字。

例 9 解方程
$$\sqrt{x} + \sqrt{y-a} + \sqrt{z+a-3} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$



第 1 节 公式法

例 1 分解因式

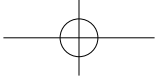
$$16(m-n)^2-9(m+n)^2$$

例 2 分解因式

$$-(5m^2-7n^2)^2+(7m^2-5n^2)^2$$

例 3 分解因式

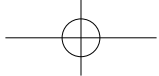
$$x^6-y^6$$



例 4 分解因式
 $9a^2+9b^2+4c^2-18ab-12bc+12ac$

例 5 分解因式
 $27a^3+8b^3+54a^2b+36ab^2$

例 6 分解因式
 $a^3+b^3+3ab-1$



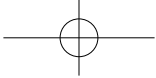
第 3 节 初步应用

例 1 求证：
 $\underbrace{100\cdots 01}_{\text{共1991个0}}$ 是合数。

例 2 设 a, b 是有理数，且 $a^5 + b^5 = 2a^2b^2$ ，
求证： $1 - ab$ 是一个有理数的平方。

第 4 节 十字相乘法

例 1 分解因式
 $a^2x^2 + 2a^2x + a^2 + ax^2 - 2ax - 2x - 3a + 2$



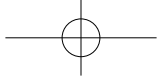
第 5 节 双十字相乘法

例 1 分解因式
 $x^2+3xy+2y^2+5x+8y+6$

例 2 分解因式
 $3x^2-3y^2+6z^2+8xy+11xz+3yz$

第 7 节 换元法

例 1 分解因式
 $(x^4+x^2-4)(x^4+x^2+3)+10$



例 2 分解因式

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$$

例 3 分解因式

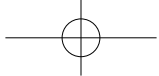
$$(4x^2-4x-35)(x^2-9)-91$$

例 4 分解因式

$$x^4+1998x^2+1997x+1998$$

例 5 分解因式

$$(ab-1)^2+(a+b-2)(a+b-2ab)$$



例 6 分解因式
 $(x-1)^3+(3-2x)^3+(x-2)^3$

例 7 分解因式
 $x^4-6x^3+12x^2-12x+4$

第 8 节 待定系数法 之一

例 1 分解因式
 $x^2+2xy-3y^2+3x+y+2$

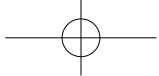
例 2 分解因式
 x^4+x^2+1



例 3 分解因式
 x^4+1

例 4 分解因式
 $x^4-x^3+4x^2+3x+5$

例 5 分解因式
 $48x^4-51x^3+32x^2+71x+18$



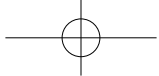
第 9 节 待定系数法 之二

例 1 分解因式
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

例 2 分解因式
 $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$

第 10 节 配方法

例 1 分解因式
 $x^4 + 4$



例 2 分解因式

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2$$

例 3 分解因式

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

例 4 分解因式

$$x^4 - 4x + 3$$

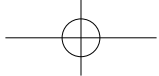
25

代数式的综合运算

例 1 设 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$,
求 $\frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}{x^3 - x}$ 的值。

例 2 已知 $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, 求 $\frac{2\sqrt{10(x+y)} - 3\sqrt{xy}}{3x^2 - 5xy + 3y^2}$

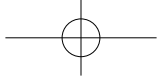
例 3 已知 $\frac{1}{x} + x = 3$,
求 $x^{10} + x^5 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}}$ 的值。



例 4 已知 a, b, c 为非零实数, $a+b+c \neq 0$, 且 $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$, 求 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 的值。

例 5 设 $2004x^3 = 2005y^3 = 2006z^3$, $xyz > 0$, 且 $\sqrt[3]{2004x^2 + 2005y^2 + 2006z^2} = \sqrt[3]{2004} + \sqrt[3]{2005} + \sqrt[3]{2006}$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ?$

例 6 已知 $a+b+c=0$, $abc \neq 0$, 计算 $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ 的值。



例 7 已知 $\sqrt{x^3+2020}-\sqrt{-x^3+2030}=54$,
求 $28\sqrt{x^3+2020}+27\sqrt{-x^3+2030}=?$

例 8 已知 $abc=1$,
求证: $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$

例 9 已知 $\frac{x}{x^2+x+1}=y \neq 0$,
用含 y 的式子表示 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

第 1 节 一元一次方程

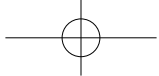
例 1 解方程

$$a\left(a-\frac{1}{6}\right)x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{6}$$

例 2 已知关于 x 的方程 $||x-2|-1|=a$ 有三个整数解，求 a 的值。

第 2 节 二元一次方程

例 1 当 $a=$ _____ 时，方程组
$$\begin{cases} 3x-5y=4a & (1) \\ 2x+7y=2a-18 & (2) \end{cases}$$
 的解互为相反数，此时方程组的解为 _____？



第3节 一元二次方程

例1 解方程
 $x^2 - |2x - 1| - 4 = 0$

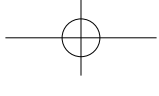
例2 解方程
 $(m-1)x^2 + (2m-1)x + m-3 = 0$

例3 若一元二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ ，且 $x^2 + cx + d = 0$ 的系数满足 $ac = 2(b+d)$ ，求证这两个方程中至少有一个有实数解。

例 4 证明方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的两个根都是有理数, 其中 a, b, k 是有理数, 且 $b=ak+\frac{c}{k}$ 。

例 5 若二次方程 $x^2+2bx+2c=0$ 有实根, 其中 b, c 为奇数, 求证方程必有两个无理数根。

例 6 求 $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$ 的最大值和最小值。

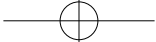


第 4 节 韦达定理

例 1 已知一元二次方程 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 两根为 x_1 和 x_2 ，求：
 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $|x_1 - x_2|$, $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $x_1^3 - x_2^3$

例 2 已知方程 $x^2 + ax + b = 0$ 两根比为 4 : 5，判别式为 2，
求方程两个根。

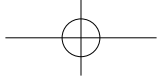
例 3 已知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1 和 x_2 ，
求以 $\frac{1}{x_1 + 3x_2}$ 和 $\frac{1}{x_2 + 3x_1}$ 为两根的一元二次方程。



例 4 设方程 $(m+1)x^2+(m-5)x+m+6=0$ 有两实根，且一根是另一根的 2 倍少 1，求 m 的值。

例 5 若方程 $x^2+(m-4)x+6-m=0$ 两根都大于 2，求 m 的取值范围。

例 6 已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$ ， $abc=1$ ，求证 a, b, c 中必有一个大于 $\frac{3}{2}$ 。



例 7 若 $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$,
求证 x, y, z 中至少有一个是 1。

例 8 已知实数 x, y, z 满足 $x+y+z=a$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$$

其中 $a>0$ ，求证：

$$0\leq x, y, z\leq \frac{2}{3}a$$

例 9 若 x, y 满足方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{4^3+6^3}+\frac{y}{4^3+7^3}=1 \\ \frac{x}{5^3+6^3}+\frac{y}{5^3+7^3}=1 \end{cases}$$

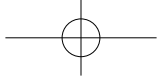
求 $x+y=?$

例 10 解方程组
$$\begin{cases} x+y+\sqrt{(x+2)(y+3)}=34 \\ (x+2)^2+(y+3)^2=741-(x+2)(y+3) \end{cases}$$

第 5 节 解方程的杂题

例 1 已知关于 x 的方程 $\left(x-\frac{a}{x}\right)^2-5x-\frac{5a}{x}=-6-4a$ 有两个实根相等，求 a 的值。

例 2 解方程 $12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$



例 3 解方程组
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=1 \\ \frac{yz}{y+z}=2 \\ zx=3(z+x) \end{cases}$$

例 4 解方程
$$\frac{x+2015}{x+2014}+\frac{x+2017}{x+2016}=\frac{x+2018}{x+2017}+\frac{x+2014}{x+2013}$$

例 5 解方程
$$\frac{4x^3+10x^2+16x+1}{2x^2+5x+7}=\frac{6x^3+10x^2+5x-1}{3x^2+5x+1}$$

例 6 解方程

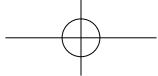
$$\frac{4}{x^2+3x}+\frac{5}{x^2+3x-6}+\frac{3}{2}=0$$

例 7 解方程

$$\frac{3x^2+4x+3}{3x^2-4x-3}=\frac{3x^2-6x+4}{3x^2+6x-4}$$

例 8 解方程

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}$$

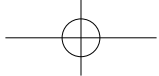


例 9 解方程

$$5\sqrt{x}+5\sqrt{2x+3}+2\sqrt{2x^2+3x}=11-3x$$

例 10 解方程

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$$



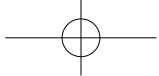
27

一元二次不等式

例 1 $x^2 - 3x + 2 < 0$

例 2 解不等式 $x^2 - 4|x| + 3 > 0$

例 3 解不等式
 $|x^2 - 2x - 3| > 2$



例 4 解不等式
 $|2x-3| > x-1$

例 5 解不等式
 $x^2 - (a+3)x + 3a < 0$

例 6 设 n, a 为参数，
解不等式 $n^2(x^2+1)+6 > a^2+2(n^2x+3)$

例 7 要使不等式 $x^2+mx-6m^2 < 0$ 的解包含 $1 < x < 2$ ，
求 m 的取值范围。